$\mathbb{R}^n$ の空でない星状開集合 U は $\mathbb{R}^n$ と微分同相

tko919

U が星状 $\overset{\text{def}}{\iff} \exists x_0 \in U, \forall x \in U, 0 \le \forall t \le 1, (1-t)x_0 + tx \in U$

Fact として次を認める。

$\mathbb{R}^n$ の閉集合 V に対し、C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ で $f(V) = 0, 0 \notin f(V^c)$ となるものが存在する。

証明は "Bump function" 等で調べれば出てくるが、本筋ではないので割愛する。

定理 0.1. $\mathbb{R}^n$ の空でない星状開集合 U は $\mathbb{R}^n$ と微分同相である。

Proof. 平行移動によって $x_0 = 0$ としてよい。

微分同相写像 f の構成

Fact より C^∞ 級関数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ で $\phi^{-1}(0) = U^c$ となるものが取れる。このとき、

$$
\begin{aligned}
g &: U \to \mathbb{R} \\
&\quad x \mapsto \left(\int_0^1 \frac{dt}{\phi(xt)}\right)^2 \cdot ||x||^2 \\
f &: U \to \mathbb{R}^n \\
&\quad x \mapsto g(x) \cdot x
\end{aligned}
$$

と定義する。

$f : C^\infty$ 級関数

ϕ は C^∞ 級なので $\frac{1}{\phi}$ および $\int_0^1 \frac{dt}{\phi(xt)}$ は U 上 C^∞ 級。また $||x||^2$ は各成分の多項式で表せるので特に C^∞ 級。よって g および f は U 上 C^∞ 級。

f : 単射

$x \ne y$ を U の元とする。$x = 0, y \ne 0$ ならば ϕ は $\{ty : 0 \le t \le 1\}$ 上で正なので $g(y) > 0$ 。
$\dot{x} = \frac{x}{||x||}$ として、 $\dot{x} \ne \dot{y}$ ならば $\dot{f(x)} \ne \dot{f(y)}$ より $f(x) \ne f(y)$ 。
また $\dot{x} = \dot{y}$ ならば一般性を失わず $||x|| < ||y||$ としてよく、置換積分によって $g(x) = (\int_0^{||x||} \frac{dt}{\phi(t\dot{x})})^2$ よりこれはノルムの大きさに対して狭義単調増加。よって $g(x) < g(y), ||f(x)|| = g(x)||x|| < g(y)||y|| = ||f(y)||$ 。

f : 全射

　$A(x)=\{t\geq 0 : t\dot{x}\in U\}$ と置く。

(i) $A(x)=+\infty$ のとき

$L=(\int_0^1 \frac{dt}{\phi(t\dot{x})})^2$ とすると、 $||x||\geq 1\Rightarrow L\leq g(x)$ 。よって $||f(x)||=g(x)\cdot||x||\leq L||x|| \xrightarrow{||x||\to+\infty} +\infty$ 。

(ii) $A(x)<+\infty$ のとき

ϕ は C^∞ 級なので、平均値の定理より $\forall t\in[0,A(x)),\exists u\in[t,A(x)],\mathrm{s.t.}\frac{|\phi(A(x)\dot{x})-\phi(t\dot{x})|}{A(x)-t}=\phi'(u\dot{x})$ 。

よって $M=\sup\{\phi'(u\dot{x}) : u\in[0,A(x)]\}$ とすると、 ϕ' は C^∞ 級かつ $[0,A(x)] : \mathrm{cpt}$ より M は有限。

このとき $\phi(A(x)\dot{x})=0$ なので $\forall t\in[0,A(x)],\phi(t\dot{x})\leq M(A(x)-t)$ より

$$\begin{aligned}
g(x)&=(\int_0^{||x||}\frac{dt}{\phi(t\dot{x})})^2\\
&\geq(\int_0^{||x||}\frac{dt}{M(A(x)-t)})^2\\
&\geq\frac{1}{M}(\int_{A(x)-||x||}^{A(x)}\frac{dt}{t})^2 \xrightarrow{||x||\to A(x)} +\infty
\end{aligned}$$

したがって連続性から中間値の定理を用いて f は全射である。

$f^{-1} : C^\infty$ 級関数

　逆関数定理の系を用いると、 $\forall x\in U,h\neq 0$ について $d_hf(x)\neq 0$ となることを言えばよい。背理法で示す。

chain rule により $d_hf(x)=g(x)h+d_hg(x)x=0$ となり、$h\neq 0$ より h,x は一次従属。よって $h=\mu x(\mu\neq 0,x\neq 0)$ とおくと、$g(x)+d_xg(x)=0$ が成り立つ。

しかし $0\leq g(x)$ であり、$\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R},t\mapsto g(tx)$ とすると狭義単調増加性より $d_xg(x)=\lambda'(1)>0$ 。これは仮定に反する。 □