Riemann 幾何学とリッチフロー

tko919

目次

第 1 章

Riemann 幾何

1.1 Riemann 計量と接続

定義 1.1.1. M を可微分多様体とする。 M 上の **Riemann 計量**とは、各点 $p \in M$ の接ベクトル空間に対する内積 $\langle -, - \rangle_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ の族であり、$\langle -, - \rangle \colon M \ni p \mapsto \langle -, - \rangle_p$ が C^∞ 級であるものを指す。組 $(M, \langle -, - \rangle)$ を **Riemann 多様体**という。

Euclid 空間ではベクトルの平行移動が自然に行えるが、一般の多様体上では移動したベクトルが接空間の外にはみ出してしまうことがある。そこで、異なる点の接空間を「つなげる」ことで形式的に平行移動を可能にする機構を作りたい。

定義 1.1.2. M を可微分多様体、$\mathfrak{X}(M)$ を M 上のベクトル場全体とする。

M 上の **Affine 接続**ないし**共変微分**とは、写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ であって、次の条件を満たすものである。($X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ とする)

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$
(2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(3) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f \nabla_X Y$

この条件を満たす接続は無数に存在する。そこで Riemann 計量に対する良い性質を持った接続をひとつ採用したい。

定義 1.1.3. Affine 接続 ∇ が**対称的**とは、$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ を満たすものをいう。

定義 1.1.4. Riemann 多様体 $(M, \langle -, - \rangle)$ 上の Affine 接続 ∇ が**計量と両立する**とは、$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ について $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ を満たすものをいう。

接続 ∇ が計量と両立するとき、曲線 $\gamma(t)$ に沿った平行なベクトル場 $X(t), Y(t)$ に対して $\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t) \rangle = \langle \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y(t) \rangle = 0$ より $\langle X(t), Y(t) \rangle$ は定数になる。つまり、平行移動によって 2 つのベクトルの「角度」が保存されることを表現している。

定理 1.1.1. Riemann 多様体 $(M, \langle -, - \rangle)$ 上で対称的かつ計量と両立する Affine 接続 ∇ が一意に存在する。これを **Levi-Civita 接続**という。 □

1.2 測地線と第一変分公式

定義 1.2.1. $(M, \langle -, - \rangle)$ を連結な Riemann 多様体、$\gamma\colon [a,b] \to M$ を区分的なめらかな曲線 (つまり、$[a,b]$ の分割 $\{s_i\}$ が存在して各区間 $[s_i, s_{i+1}]$ 上 C^∞ 級な連続写像) とする。γ の**長さ** を $L(\gamma) := \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} |\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)| ds$ とする ($|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$)。$M$ 上の 2 点 p, q について $\rho(p,q) := \inf\{L(\gamma)\colon \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$ が定められ、距離の公理を満たす。また γ の**エネルギー**を $E(\gamma) := \int_a^b |\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)|^2 ds$ とする。$E(p,q)$ も同様に定める。

Cauchy-Schwarz の不等式より $L(\gamma)^2 \leq |b-a| E(\gamma)$ が成り立ち、等号が成立するのは $|\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s)|$ が定数のときである。

端点 p, q を固定したまま γ を摂動して、エネルギー E が極小値をとる曲線を調べたい。そのために区分的滑らかな曲線の 1 パラメータ族 $\widehat{\gamma}\colon [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \ni (s,u) \mapsto \widehat{\gamma}_u(s) \in M$ をとり $\gamma = \widehat{\gamma}_0, U(s) = \frac{\partial \widehat{\gamma}}{\partial u}(s, 0)$ とおく。逆に U が与えられたとき、条件を満たす $\widehat{\gamma}$ を構成することもできる。端点を固定しているとき $U(a) = U(b) = 0$ に注意する。

ある U について $u \mapsto E(\widehat{\gamma})$ の $u = 0$ による微分は $\widehat{\gamma}$ の取り方に依存しない。よって $\dot{E}(U) := \frac{\partial E(\widehat{\gamma})}{\partial u}|_{u=0}$ を定義でき、これは γ を U に沿って滑らかに変形したときの差分を表す。特に $E(p,q)$ を実現する γ は $\dot{E}(U) = 0$ を満たすと考えられる。

以降ではベクトル場 $d\widehat{\gamma}(\frac{\partial}{\partial u})$ を $\frac{\partial}{\partial u}$ と略記する。∇ を Levi-Civita 接続とすると、E の被積分関数の u による微分が

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} |\frac{\partial \widehat{\gamma}}{\partial s}|^2 &= \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial s} \widehat{\gamma}, \frac{\partial \widehat{\gamma}}{\partial s} \rangle \\
&= \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u} \widehat{\gamma}, \frac{\partial \widehat{\gamma}}{\partial s} \rangle \ (\because [\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial u}] = 0) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \langle \frac{\partial \widehat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial \widehat{\gamma}}{\partial s} \rangle - \langle \frac{\partial \widehat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} \widehat{\gamma} \rangle
\end{aligned}
$$

となり、これを積分すると

$$
\frac{1}{2} \dot{E}(U) = \sum_i [\langle U, \dot{\gamma} \rangle]_{s_i}^{s_{i+1}} - \int_a^b \langle U, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle ds \tag{1.1}
$$

が得られる。これを **第一変分公式**と呼ぶ。

$\widehat{\gamma}$ が滑らかなとき第一項が消え、全ての U に対して第一変分が 0 となるときには **Euler-Lagrange 方程式**

$$
\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \tag{1.2}
$$

が成り立つ。この方程式を満たす γ を**測地線**という。

改めて γ を測地線としたとき、 $\frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\dot{\gamma}|^2 = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} \gamma, \dot{\gamma} \rangle = 0$ より $|\dot{\gamma}|$ は定数。よって s は γ の弧長パラメータに比例する。また、(1.2) は Affine 変換に対して不変なので、 $s \mapsto |\dot{\gamma}| s$ に取り替えることで最初から弧長パラメータ表示を持つと仮定してよい。

(1.2) は 2 階の常微分方程式なので、初期値 $\gamma(0) = p \in M, \dot{\gamma}(0) = v \in T_pM$ が与えられると、Picard-Lindelöf の定理より $\exists \delta > 0, \exists! \gamma_v : (-\delta, \delta) \to M$ s.t. (1.2)。この δ は $(p, v) \in TM$ に対して局所一様連続となるので、結局 $p \in M$ に対して $0 \in \exists U \subset T_pM$ s.t. $\delta > 1$ より **指数写像** $\exp_p : U \ni v \mapsto \gamma_v(1) \in M$ が定義できる。一般論からこれは C^∞ 級となる。

補題 1.2.1. $\gamma:[0,a]\to M$ を 2 点 p,q を結ぶ区分的滑らかな曲線で、弧長に比例するパラメータを持つとする。もし $L(\gamma)=\rho(p,q)$ のとき、 γ は滑らかで (1.2) を満たす。このとき γ を**最短測地線**と呼ぶ。

証明. パラメータの仮定から $L(\gamma)^2=aE(\gamma)$ より γ は E の最小値をとるので $\forall U,\dot{E}(U)=0$ 。γ に属する $[0,a]$ の分割 $\{s_i\}$ について、s_i の近傍で 0 となる適切な U を選ぶことで (1.1) の第一項を消すことができ、γ の smooth な点全体で (1.2) が成り立つ。有限集合は測度 0 なので特に (1.1) の第二項は無視できる。よって $\sum_i\langle U(s_i),\dot{\gamma}(s_i^+)-\dot{\gamma}(s_i^-)\rangle=0$ より $\dot{\gamma}(s_i^+)=\dot{\gamma}(s_i^-)$ 。したがって γ は C^1 級であり、解の一意性から滑らかな曲線であることがわかる。 $\square$

逆関数定理から $\exp_p$ は $0\in T_pM$ の近傍 U で局所微分同相となる。$\iota_p:=\inf\{r>0\colon B(0;r)\subset U\}>0$ を p の**単射半径**という。また $\iota(V)=\inf_{p\in V}\iota_p$ を V の単射半径と呼ぶが、これは 0 になることがある。$r\leq\iota_p$ について $\exp_p$ による $B(0;r)\subset T_pM$ は p の局所座標近傍を定める。これを**正規座標**と呼ぶ。

補題 1.2.2. 任意の p について $\iota(V)>0$ なる近傍 $p\in V$ が存在する。

証明. $(p,0)\in TM$ のある近傍 D が存在して $\exp:D\ni(q,v)\mapsto\exp_q(v)\in M\times M$ が定義される。これについて逆関数定理を使うことで所望の結論を得る。 $\square$

補題 1.2.3. (Gauss の補題) $p\in M,\delta<\iota_p,v,w\in B(0;\delta)\subset T_pM,q:=\exp_p v\in M$ とすると、微分 $d_v\exp_p:T_v(T_pM)\cong T_pM\to T_qM$ は v と始点を共有するベクトルの等長写像。つまり、 $\langle d_v\exp_p v,d_v\exp_p w\rangle_q=\langle v,w\rangle_p$ 。

証明. $\epsilon>0$ を十分小さくとり $\varphi:[0,1]\times(-\epsilon,\epsilon)\to M,(s,t)\mapsto\exp_p(s(v+tw))$ とおく。このとき

$$
\begin{aligned}
d_v\exp_p(v)&=\frac{\partial}{\partial s}\exp_p((s+1)v)|_{s=0}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0)\\
d_v\exp_p(w)&=\frac{\partial}{\partial t}\exp_p(v+tw)|_{t=0}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0)
\end{aligned}
$$

より示したいことは $\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s}(1,0),\frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,0)\rangle_q=\langle v,w\rangle_p$ と言い換えられる。
$s\mapsto\varphi(s,t)$ は測地線なので $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)=0$ 。よって Levi-Civita 接続の性質から

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle&=\underbrace{\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle}_{0}+\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle\\
&=\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|v+tw|^2=\langle v,w\rangle+t\,\langle w,w\rangle
\end{aligned}
$$

より $\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle(s,0)=\langle v,w\rangle$ 。また $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,0)=\frac{\partial}{\partial t}\exp_p(0)=0$ と併せて $\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial s},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle(s,0)=s\,\langle v,w\rangle$ が分かるので、$s=1$ を代入して題意を得る。 $\square$

命題 1.2.1. $p\in M,r_0<\iota_p$ とし、 $\gamma:[0,1]\to B(p;r_0):=\exp_p(B(0;r_0)),\gamma(0)=p$ は区分的滑らかな曲線で $q:=\gamma(1)$ とすると、$L(\gamma)\geq r$ 。等号が成り立つのは γ が測地線 (をパラメータ変換したもの) のときに限る。

証明. $\exists r : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \eta : [0,1] \to \{X \in T_pM \colon |X| = 1\}$ s.t. $\gamma(t) = \exp_p(r(t)\eta(t))$ より、$\dot\gamma(t) = d_{\gamma(t)}\exp_p(\dot r(t)\eta(t)) + d_{\gamma(t)}\exp_p(r(t)\dot\eta(t))$ 。

ここで η が微分可能な t では $2\langle\dot\eta(t), \eta(t)\rangle = \frac{d}{dt}\underbrace{\langle\eta(t), \eta(t)\rangle}_{1} = 0$ なので補題 1.2.3 より、上の $\dot\gamma(t)$ の分解は直交分解。よって

$$\begin{aligned}
|\dot\gamma(t)| &\geq |d_{\gamma(t)}\exp_p(\dot r(t)\eta(t))| \\
&= |\dot r(t)| \cdot |d_{\gamma(t)}\exp_p(\eta(t))| = |\dot r(t)| \\
L(\gamma) &\geq \int_0^1 |\dot r(t)| dt \\
&\geq |\int_0^1 \dot r(t) dt| \\
&= r(1) - r(0) = \rho(p,q)
\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $\eta(t)$ が区分的定数かつ $\dot r \geq 0$ のときだが、$\eta(t)$ が定数のところでは正規化して $\dot r = 1$ を仮定してよいので、結局 η は定数関数にできる。このとき γ は測地線パラメータ変換で得られる。 □

補題 1.2.4. $r_0 < \iota_p$ とし $p, q \in M$ を $\rho(p,q)$ とすると $\exists q' \in \partial B(p; r_0)$ s.t. $\rho(p,q) = \rho(p,q') + r_0$ 。

証明. p, q を結ぶ曲線の族 $\{\gamma_i\}$ で $L(\gamma_i) \to \rho(p,q)$ なるものをとり、$\partial B(p; r_0)$ との交点を q_i とするとコンパクト性から $q_i \to \exists q'$ 。距離の公理からこの q' は条件を満たす。 □

命題 1.2.2. (M, g) が完備のとき、$v \in T_pM$ を初期値とする (1.2) の解は $[0, \infty)$ 上に延長できる。つまり $\exp_p$ は T_pM 全体で定義される。

証明. 解の存在区間の上限を A としたとき、$A < \infty$ を仮定して矛盾を言えばよい。ρ の定義より $\rho(\gamma_v(s), \gamma_v(t)) \leq |s - t| \cdot |v|$ 。$s \uparrow A$ とすると $\gamma_v(s)$ は Cauchy 列なので、完備性から $\exists q = \lim_{s\uparrow A}\gamma_v(s)$ 。ここで補題 1.2.2 を使うと測地線が $[0, A + \delta)$ まで延長できるので仮定に矛盾する。 □

定理 1.2.1. (Hopf-Rinow の定理) (M, g) が完備のとき、$\forall p, q \in M$ について p, q を結ぶ最短測地線が存在する。

証明. $r_0 < \iota_p$ として、$\rho(p,q) > r_0$ を仮定してよい。補題 1.2.4 で得られる q' をとると命題 1.2.1 から $\exists v \in T_pM, q' = \exp_p(r_0 v)$ 。また命題 1.2.2 より $\gamma(s) = \exp_p(sv)$ は $[0, \infty)$ 上で定義される。

$K = \{s \in [0, \infty) \colon L(\gamma|_{[0,s]}) + \rho(\gamma(s), q) = \rho(p,q)\}$ とおくと、$s_0 \in K$ のとき $L(\gamma|_{[0,s_0]}) = \rho(p,q) - \rho(\gamma(s_0), q) \leq \rho(p, \gamma(s_0))$ より $\gamma|_{[0,s_0]}$ は最短測地線。K はコンパクトなので $\overline{s} := \max K \in K$ であり $q_2 = \gamma(\overline{s})$ がとれるので、$q_2 = q$ を示せばよい。

そうでないとき、$r_1 = \min(\rho(q_2, q)/2, \iota_{q_2}) > 0$ とおくと、補題 1.2.4 より $\exists q_3 \in \partial B(q_2, r_1)$ s.t. $\rho(q_2, q_3) + \rho(q_3, q) = \rho(q_2, q)$ 。三角不等式より

$$\begin{aligned}
\rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) &= \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q) - \rho(q_3, q) \\
&= \rho(p, q) - \rho(q_3, q) \leq \rho(p, q_3)
\end{aligned}$$

より $\rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) = \rho(p, q_3)$ 。よって、常微分方程式の解の一意性から q_2, q_3 を結ぶ最短測地線は γ と一致し、$q_3 = \gamma(\overline{s} + r_1)$ より $L(\gamma|_[0, s + r_1]) + \rho(q_3, q) = \rho(p, q_2) + \rho(q_2, q_3) + \rho(q_3, q) = \rho(p,q)$ 。これは

$\overline{s}$ の最大性に矛盾する。 □

Riemann 多様体に局所的な完備性を仮定しても、同様の結論が得られる。

定義 1.2.2. Riemann 多様体 (M, g) と 1 点 $p \in M$ の組 (M, g, p) を **基点つき Riemann 多様体**という。

定義 1.2.3. $D > 0$ とする。 $\forall l < D$ について基点つき Riemann 多様体 (M, g, p) の閉測地球 $\overline{B(p; l)}$ がコンパクトのとき、**D-完備**という。

定理 1.2.2. D-完備な基点つき Riemann 多様体 (M, g, p) について $\exp_p : B(0; D) \to M$ が定義され、$\rho(p, q) < D$ なる $p, q \in M$ を結ぶ最短測地線が存在する。 □

1.3 第二変分公式と Jacobi 場

エネルギー汎関数 E が極値をとる曲線を測地線と定義したが、E が極小値をとるならば 2 階微分 $\ddot{E}(U) = \frac{\partial^2 E}{\partial u^2}|_{u=0}$ は非負となるだろう。

$\gamma : [0, a] \to M$ を測地線とし $\widehat{\gamma}, U$ をその変分・変分ベクトルとすると、被積分関数の u による 2 階微分は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u})^2|\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}|^2 &= \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial s}\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle - \langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s\partial u}\langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle - \underbrace{\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle}_{0\ (u=0)} - \langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}, \frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle + \langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial s}\rangle) - \langle\frac{\partial\widehat{\gamma}}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}\rangle
\end{aligned}$$

第三項について曲率テンソルの定義から

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\gamma(U) &:= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial u}\widehat{\gamma} + R(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial s})\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\gamma}
\end{aligned}$$

が成り立ち、これを **Jacobi 作用素**という。これを積分すると**第二変分公式**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ddot{E}(U) &= [\langle\nabla_U U, \dot{\gamma}\rangle + \langle U, \nabla_U\dot{\gamma}\rangle]_0^a - \int_0^a \langle U, \mathcal{J}_\gamma U\rangle ds \\
&= [\langle\nabla_U U, \dot{\gamma}\rangle]_0^a + \int_0^a (|\nabla_{\dot{\gamma}}U|^2 - \langle U, R(U, \dot{\gamma})\dot{\gamma}\rangle)ds
\end{aligned}$$

を得る。

$\mathcal{V}_s$ を $\gamma|_{0,s}$ に沿った区分的滑らかなベクトル場全体の集合、$\mathcal{V}_s^0 = \{X \in \mathcal{V}_s \colon X(0) = X(s) = 0\}$ とする (特に $\mathcal{V} := \mathcal{V}_a, \mathcal{V}^0 := \mathcal{V}_a^0$)。第二変分公式の第二項について、$U, V \in \mathcal{V}$ として

$$\begin{aligned}
I(U, V) &:= \int_0^a (\langle\nabla_{\dot{\gamma}}U, \nabla_{\dot{\gamma}}V\rangle - \langle R(U, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, V\rangle)ds \\
&= [\langle\nabla_{\dot{\gamma}}U, V\rangle]_0^a - \int_0^a \langle\nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}U + R(U, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, V\rangle ds
\end{aligned}$$

を**指数形式**という。$\forall X \in \mathcal{V}^0, I(X,X) \geq 0$ のとき I を**半正定値**であるといい、さらに $0 \neq \forall X \in \mathcal{V}^0, I(X,X) > 0$ のとき I を**正定値**であるという。$\widehat{\gamma}_u(s) = \exp_{\gamma(s)} uX(s)$ を考えることで、γ が最短ならば I が半正定値であることが従う。

$\{e_i\}$ を T_pM の正規直交基底として、

$$\mathrm{Rc}(X,Y) := \sum_i \langle R(X,e_i)e_i, Y\rangle = \mathrm{tr}[Z \mapsto R(Z,X)Y]$$

で定まる TM の対称双線形形式を **Ricci 曲率**といい、$R(p) = \sum_i \mathrm{Rc}(e_i,e_i)$ で定まる値を **Scalar 曲率**という。

定理 1.3.1. (Myers の定理) $\lambda > 0, D > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ とする。D-完備な n 次元 Riemann 多様体 (M,g) について $\mathrm{Rc} \geq (n-1)\lambda$ が成り立てば、 M はコンパクトで $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$

証明. 2 点 $p,q \in M$ をとり $\rho(p,q) = l < D$ とする。定理 1.2.1 より最短測地線 $\gamma : [0,1] \to M$ が存在する。$\{e_i\}_{i=1}^n$ $(e_1 = \dot{\gamma}/l)$ を γ に沿った平行なベクトル場で、各点の接空間の正規直交基底を成すとする。そして $U_i = \sin(\pi s)e_i$ とおくと、 U_i は全域で滑らかなことに注意して

$$\begin{aligned}
I(U_i,U_i) &= -\int_0^1 \langle U_i, \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}U_i + R(U_i,\dot{\gamma})\dot{\gamma}\rangle\, ds \\
&= -\int_0^1 \frac{\partial^2 \sin(\pi s)}{\partial s^2} + l^2 \sin^2(\pi s) \langle R(e_i,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_i\rangle\, ds \\
&= \int_0^1 \sin^2(\pi s)(\pi^2 - l^2 \langle R(e_i,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, e_i\rangle) ds \\
\sum_{i=2}^n I(U_i,U_i) &= \int_0^1 \sin^2(\pi s)((n-1)\pi^2 - l^2 \mathrm{Rc}(\dot{\gamma},\dot{\gamma})) ds
\end{aligned}$$

ここで $l > \pi/\sqrt{\lambda}$ とすると右辺は負になるので、$\exists U_i, I(U_i,U_i) < 0$ 。よって I は半正定値でないので γ の最短性に矛盾する。定理 1.2.1 から $M = \exp_p(\overline{B(0;\pi/\sqrt{\lambda})})$ より M はコンパクト。 □

定義 1.3.1. γ に沿ったベクトル場 V が

$$\mathcal{J}_\gamma V = \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}V + R(V,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 \tag{1.3}$$

を満たすとき、 V を **Jacobi 場**という。1.3 は 2 階の常微分方程式なので、基点 $p = \gamma(0)$ での初期値 $V(0), \nabla_{\dot{\gamma}}V(0) \in T_pM$ が与えられたとき、条件を満たす Jacobi 場が一意的にとれる。よって、 M の次元を n として Jacobi 場全体は $2n$ 次元のベクトル空間をなす。

補題 1.3.1. V を γ に沿った Jacobi 場とする。$\langle V,\dot{\gamma}\rangle = 0$ と $\langle V(0),\dot{\gamma}(0)\rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}}V(0),\dot{\gamma}(0)\rangle = 0$ は同値 (このような V を**直交 Jacobi 場**という)。

証明. $\frac{d^2}{dt^2}\langle V,\dot{\gamma}\rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}V,\dot{\gamma}\rangle = -\langle R(\dot{\gamma},V)\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = 0$ より $\langle V,\dot{\gamma}\rangle = ct + d$ $(c,d \in \mathbb{R})$ と書ける。 $U = V - \frac{ct+d}{|\dot{\gamma}|^2}\dot{\gamma}$ とおくと $\langle U,\dot{\gamma}\rangle = 0$ より U は直交 Jacobi 場となる。このとき $\langle V(0),\dot{\gamma}(0)\rangle = d, \langle \nabla_{\dot{\gamma}}V(0),\dot{\gamma}(0)\rangle = c$ より題意を得る。 □

例 1.3.1. $\gamma(s,u)$ を測地線の 1 パラメータ族とすると $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\dot\gamma$ 。よって Jacobi 作用素の定義から $U=\frac{\partial\gamma}{\partial u}|_{u=0}$ 。特に $\gamma(s,t)=\exp_p(s(X+uY))$ のとき $U=d_{sX}\exp_p(sY)$ であり、初期値は $U(0)=0,\nabla_{\dot\gamma}U(0)=Y$ なので $U(0)=0$ なる $\gamma=\exp_p sX$ 上の Jacobi 場は全てこの形になる。

補題 1.3.2. 測地線 $\gamma:[0,a]\to M$ の指数形式が半正定値で $U\in\mathcal{V}^0, I(U,U)=0$ ならば、U は Jacobi 場。

証明. $\forall V\in\mathcal{V}^0,\forall\alpha\in\mathbb{R}$ について $I(U+\alpha V,U+\alpha V)=2\alpha I(U,V)+\alpha^2 I(V,V)\geq 0$ より $I(U,V)=0$ (そうでないなら、α を適切に設定して左辺を負にすることが出来る)。よって、

$$0=I(U,V)=\sum_i\left\langle\nabla_{\dot\gamma}U(s_i^-)-\nabla_{\dot\gamma}U(s_i^+),V\right\rangle-\int_0^a\langle\mathcal{J}_\gamma U,V\rangle\,ds$$

が成り立ち、 V は任意なので $\mathcal{J}_\gamma U=0$ が従う。 □

補題 1.3.3. (指数定理) 測地線 $\gamma:[0,a]\to M$ の指数形式が半正定値とする。γ に沿った Jacobi 場 Y と $V\in\mathcal{V}$ が $Y(0)=V(0),Y(a)=V(a)$ を満たすとき、$I(Y,Y)\leq I(V,V)$ が成り立つ。等号が成立する条件は V が Jacobi 場であるときのみ。

証明. 指数形式の定義より $I(Y,Y-V)=0$ なので

$$\begin{aligned}0&\leq I(Y-V,Y-V)\\&=I(-Y-V,Y-V)+2I(Y,Y-V)\\&=I(V,V)-I(Y,Y)\end{aligned}$$

等号条件は前の補題と Jacobi 場の線形性から成り立つ。 □

定義 1.3.2. 測地線 γ 上の相異なる 2 点 $p=\gamma(0),q=\gamma(s_1)$ に対して $V(0)=V(s_1)=0$ なる γ 上の 0 でない Jacobi 場が存在するとき、 p,q は γ に沿って **共役** であるという。例 1.3.1 より γ_X に沿って p と $q=\exp_p(X)$ が共役なことと X が $\exp_p$ の臨界点であることは同値。

命題 1.3.1. $\gamma:[0,a]\to M$ を測地線とする。

(1) γ 上 $p=\gamma(0)$ と共役な点が存在しない $\iff$ I が正定値
(2) γ 上 $p=\gamma(0)$ と共役な $q=\gamma(a)$ でない点が存在しない $\iff$ I が半正定値

証明. 必要性を示す。$q_1=\gamma(s_1)$ とし、V を γ 上の Jacobi 場で $V(p)=V(q_1)=0$ を満たすとする。このとき、$U(s)=\begin{cases}V(s) & (s\in[0,s_1])\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$ は γ 上に区分的滑らかなベクトル場であり $I(U,U)=0$ を得る。I が正定値ならば $V\equiv 0$ である。半正定値ならば補題 1.3.2 より U は Jacobi 場だが、$s_1\neq a$ のとき U は a の近傍で恒等的に 0 なので $U(a)=\nabla_{\dot\gamma}U(a)=0$ 。初期値を満たす Jacobi 場の一意性より $V\equiv 0$ を得る。

十分性を示す。「I が半正定値でないなら端点でない p と共役な点が存在する」ことを示せばよい。($\because$ 特に γ 上 p と共役な点が存在しないときも I は半正定値なので、$V\in\mathcal{V}^0,I(V,V)=0$ について補題 1.3.2 より V は Jacobi 場。$V(0)=V(a)=0$ と仮定から $V\equiv 0$ が従い I は正定値となる) $\gamma_s:=\gamma|_{[0,s]}$ に対し $I_s:=I_{\gamma_s}$ が半正定値となる s の上限を s_1 とおく。補題 1.2.2、命題 1.2.1 より $s_1>0$ であり、 I の連続性から I_{s_1} も半正定値。$s_1<a$ ならば $p,\gamma(s_1)$ が共役であることを言いたい。

再び補題 1.2.2 より $0<\forall\epsilon<\delta$ について $\sigma_\epsilon=\gamma|_{[s_1-\delta,s_1+\epsilon]}$ が最短となる $\delta>0$ が存在する。このとき $I_{s_1+\epsilon}$ は半正定値でないので、 $\exists X_\epsilon\in\mathcal{V}^0_{s_1+\epsilon}, I_{s_1+\epsilon}(X_\epsilon,X_\epsilon)<0$ 。$s_1-\delta$ の近傍での変形によって $|X_\epsilon(s_1-\delta)|=1$

を仮定してよい。例 1.3.1 より $U^-(0)=0, U^-(s_1-\delta)=X_\epsilon(s_1-\delta)$ なる $\gamma_{s_1-\delta}$ 上の Jacobi 場が存在し、補題 1.3.3 より $I_{s_1-\delta}(U^-,U^-)\le I_{s_1-\delta}(X_\epsilon,X_\epsilon)$ 。同様に $U^+(s_1+\epsilon)=0, U^+(s_1-\delta)=X_\epsilon(s_1-\delta)$ なる σ_ϵ 上の Jacobi 場をとると $I_{\sigma_\epsilon}(U^+,U^+)\le I_{\sigma_\epsilon}(X_\epsilon,X_\epsilon)$ が分かる。

U^-,U^+ を $s_1-\delta$ で接続したベクトル場を $V_\epsilon\in\mathcal{V}^0_{s_1+\epsilon}$ とすると、辺々足して $I_{s_1+\epsilon}(V_\epsilon,V_\epsilon)\le I_{s_1+\epsilon}(X_\epsilon,X_\epsilon)<0$ 。$\epsilon\downarrow 0$ なる列を適切に選び U^-,U^+ を収束させると、 $|V_\epsilon(s_1-\delta)|=1$ より V_ϵ は 0 でないベクトル場 $V\in\mathcal{V}^0_{s_1}$ に収束する。これは $I_{s_1}(V,V)\le 0$ を満たすが、I_{s_1} は半正定値なので 0 に等しく、補題 1.3.2 より V は Jacobi 場。よって $p,\gamma(s_1)$ は共役。 □

系 1.3.1. 最短測地線 $\gamma:[0,a]\to M$ 上の相異なる 2 点 $\gamma(s),\gamma(t)$ $(s<t)$ が γ 上共役ならば $s=0,t=a$ 。 □

次の section まで (M,g) に完備性を課す。

補題 1.3.4. 2 点 $p,q=\exp_p v$ 間の最短測地線 $\gamma:s\mapsto\exp_p sv$ で p,q が γ 上共役でないとする。このとき、次は同値：

(1) $v\in T_pM$ の近傍 U が存在し、$w\in U$ ならば測地線 $s\mapsto\exp_p sw$ は $[0,1]$ 上最短。
(2) p,q を結ぶ最短測地線は γ のみ。

証明. p,q は共役でないので $\exp_p$ は v で正則。よって逆関数定理より v の近傍 U と q の近傍 V の微分同相を導く。条件 (1) が成立するとき $\epsilon>0$ が存在して γ は $[0,1+\epsilon]$ まで延長できるので、常微分方程式の一意性から (2) がわかる。

逆に (1) が成り立たないとき、γ に収束し $[0,1]$ 上最短でない測地線の列 $\{\gamma_i\}$ がとれる。$p,q_i=\gamma_i(1)$ を結ぶ最短測地線を σ_i とおくと、$q_i\in V$ を仮定してよいので $w_i:=\dot{\sigma_i}(0)\notin U$ となる必要がある。このとき $w_i\to w\in\overline{B(0;D)}\setminus U$ となるように列を取り直すと、 $\sigma_i\to(s\mapsto\exp_p(sw))\ne\gamma$ より (2) も不適。 □

定義 1.3.3. $v\in S_pM$ について $\mathrm{cut}(v):=\sup\{s_0\in[0,\infty)\colon[0,s_0]\ni s\mapsto\exp_p(sv)$ が最短 $\}$ とおく。$q=\exp_p(\mathrm{cut}(v)v)$ を p の**切片** と呼ぶ。 命題 1.2.1 より $\mathrm{cut}(v)>0$ であり、特に (M,g) が完備なら $\mathrm{cut}(v)=\infty$ になり得る。このとき $s\mapsto\exp_p(sv)$ はどの有界区間に制限しても最短になる。このような測地線を**半直線**と呼ぶ。

補題 1.3.5. (M,g) が完備 Riemann 多様体のとき、(M,g) がコンパクト $\iff$ p を始点とする半直線が存在しない。

証明. コンパクトならば有界なので十分性は明らか。逆に非コンパクトのとき $\rho(p,q_i)\to\infty$ なる点列を取り、γ_i を p,q_i を結ぶ弧長パラメータ表示を持つ最短測地線とする。このとき (M,g) の完備性と S_pM のコンパクト性から γ_i が $[0,\infty)$ 上の測地線 γ に収束するようにでき、これは半直線となる。 □

系 1.3.2. $s_0<\mathrm{cut}(v)$ に対して $p,q=\exp_p(s_0v)$ を結ぶ最短測地線は一意で、 q の近傍で $\rho(p,-)$ は滑らか。

証明. 補題 1.3.4 と常微分方程式の一意性から従う。 □

系 1.3.3. q が p の切片 $\iff$ p,q を結ぶ最短測地線上で p,q が共役、または p,q を結ぶ最短測地線が複数存在する。

証明. 系 1.3.1、補題 1.3.4 と常微分方程式の一意性から従う。 □

補題 1.3.6. $S_pM \ni v \mapsto \mathrm{cut}(v)$ は連続。

証明. $v_i \to v$ とする。最短測地線の収束性から $\limsup_{i\to\infty} \mathrm{cut}(v_i) \le \mathrm{cut}(v)$ 。一方、系 1.3.2 より $l < \mathrm{cut}(v)$ について $\gamma : [0,l] \to M, s \mapsto \exp_p(sv)$ は線分で前の系から端点は共役でない。したがって補題 1.3.4 より $\gamma_i : s \mapsto \exp_p(sv)$ も $[0,l]$ 上で最短測地線なので $\liminf_{i\to\infty} \mathrm{cut}(v_i) \ge \mathrm{cut}(v)$ 。 □

系 1.3.4. $\Sigma(p) := \{v \in T_pM \colon |v| < \mathrm{cut}(\frac{v}{|v|})\}, \mathrm{Cut}(p) = \exp_p(\partial\Sigma(p))$ を p の切片全体とすると、$M \setminus \mathrm{Cut}(p) = \exp_p(\Sigma(p))$ であり $\mathrm{Cut}(p)$ は測度零。

証明. 前半は系 1.3.3 を使えばよい。後半の結論は $\partial\Sigma(p) = \{v \in B(0;D) \colon |v| = \mathrm{cut}(\frac{v}{|v|})\}$ と前補題、連続関数のグラフが測度零であることから従う。 □

1.4 空間形との比較

$(M,g), (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ を Riemann 多様体、$\gamma : [0,a] \to M, \widetilde{\gamma} : [0,a] \to \widetilde{M}$ を $\gamma(0) = p, \widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{p}$ なる正規測地線とする。 $t \in [0,a]$ について $K^-(t) = \min\{K(\Pi_\gamma) \colon \dot{\gamma}(t) \in \Pi_\gamma\}, \widetilde{K}^+(t) = \min\{\widetilde{K}(\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\gamma}}) \colon \dot{\widetilde{\gamma}}(t) \in \widetilde{\Pi}_{\widetilde{\gamma}}\}$ とおく (ここで $K, \widetilde{K}$ は断面曲率)。

補題 1.4.1. $X, \widetilde{X}$ を $\gamma, \widetilde{\gamma}$ に沿った直交 Jacobi 場とし、

(1) $X(0) = \widetilde{X}(0) = 0$
(2) $|X(a)| = |\widetilde{X}(a)|$
(3) γ には $[0,a]$ 上共役な点対が存在しない
(4) $\forall t \in [0,a], \widetilde{K}^+(t) \le K^-(t)$

このとき、 $I(X,X) \le I(\widetilde{X}, \widetilde{X})$ が成り立つ。

証明. $\{e_i(t)\}, \{\widetilde{e_i}(t)\}$ を $\gamma, \widetilde{\gamma}$ に沿った正規直交基底とし、$e_1 = \dot{\gamma}, \widetilde{e_1} = \dot{\widetilde{\gamma}}, e_2(a) = X(a)/|X(a)|, \widetilde{e_2}(a) = \widetilde{X}(a)/|\widetilde{X}(a)|$ を満たすとする。ここで、(2)(3) より $|X(a)| = |\widetilde{X}(a)| = \alpha \neq 0$ に注意する。

$X, \widetilde{X}$ の $\{e_i(t)\}, \{\widetilde{e_i}(t)\}$ による成分表示を $\{X^i(t)\}, \{\widetilde{X}^i(t)\}$ とおくと、条件から

(1) $\forall i, X^i(0) = \widetilde{X}^i(0) = 0$
(2) $X^2(a) = \widetilde{X}^2(a) = \alpha, \forall i \neq 2, X^i(a) = \widetilde{X}^i(a) = 0$
(3) $\forall t \in [0,a], X^1(t) = \widetilde{X}^1(t) = 0$

が成り立つ。$Y := \sum_i \widetilde{X}^i(t) e_i(t)$ とおくと $Y(0) = 0, Y(a) = X(a)$ であり、X は Jacobi 場なので補題 1.3.3 より $I(X,X) \le I(Y,Y)$ 。一方、(4) を用いて $I(Y,Y) \le I(\widetilde{X}, \widetilde{X})$ が分かるので、併せて題意を得る。 □

定理 1.4.1. (Rauch の比較定理) $X, \widetilde{X}$ を $\gamma, \widetilde{\gamma}$ の Jacobi 場とし、次の条件を満たすと仮定する。

(1) $X(0) = \widetilde{X}(0) = 0$
(2) $|\nabla_{\dot{\gamma}} X(0)| = |\widetilde{\nabla}_{\dot{\widetilde{\gamma}}} \widetilde{X}(0)|$
(3) $\langle \dot{\gamma}(0), \nabla_{\dot{\gamma}} X(0) \rangle = \left\langle \dot{\widetilde{\gamma}}(0), \widetilde{\nabla}_{\dot{\widetilde{\gamma}}} \widetilde{X}(0) \right\rangle$
(4) γ には $[0,a]$ 上共役な点対が存在しない

(5) $\forall t \in [0,a], \widetilde{K}^{+}(t) \leq K^{-}(t)$

このとき、$\widetilde{\gamma}$ には $[0,a]$ 上共役な点対が存在せず、$\forall t \in [0,a], |X(t)| \leq |\widetilde{X}(t)|$ 。

証明. (1),(3) より初期値の接線成分が一致することから、一般性を失わず $X, \widetilde{X}$ は直交 Jacobi 場としてよい (補題 1.3.1 を参照)。

$u(t) = |X(t)|^2, \widetilde{u}(t) = |\widetilde{X}(t)|^2$ とおくと、$\widetilde{u}(t)/u(t)$ は $(0,a)$ 上 well-defined であり、L'Hospital の定理より

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{u}(t)}{u(t)} &= \lim_{t\to 0}\frac{\ddot{\widetilde{u}}(t)}{\ddot{u}(t)} \\ &= \frac{|\nabla_{\dot{\widetilde{\gamma}}}\widetilde{X}(0)|^2}{|\nabla_{\dot{\gamma}}X(0)|^2} = 1 \end{aligned}$$

よって $|X| \leq |\widetilde{X}|$ を示すためには $\frac{d}{dt}\frac{\widetilde{u}(t)}{u(t)} \geq 0 \iff \dot{\widetilde{u}}(t)u(t) - \widetilde{u}(t)\dot{u}(t) \geq 0$ が分かればよい。

(4) より $(0,a]$ 上 $u(t) > 0$ が成り立つ。 $c = \sup\{t\colon \widetilde{u}(t) > 0\} \leq a$ とおき、 $b \in (0,c)$ について $X_b(t) = \frac{X(t)}{|X(b)|}, \widetilde{X}_b(t) = \frac{\widetilde{X}(t)}{|\widetilde{X}(b)|}$ とすると、$[0,b]$ 上 $X_b, \widetilde{X}_b$ は前補題の条件を満たすので $I(X_b, X_b) \leq I(\widetilde{X}_b, \widetilde{X}_b)$ 。指数形式の定義 (に部分積分を施した形) から $I(X_b, X_b) = \langle \nabla_{\dot{\gamma}}X_b(b), X_b(b)\rangle \leq I(\widetilde{X}_b, \widetilde{X}_b) = \left\langle \widetilde{\nabla}_{\dot{\widetilde{\gamma}}}\widetilde{X}_b(b), \widetilde{X}_b(b)\right\rangle$ となるので、$\forall b \in (0,c)$ で

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\dot{u}(b)}{u(b)} &= \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}}X_b(b), X_b(b)\rangle}{\langle X(b), X(b)\rangle} \\ &\leq \frac{\left\langle \widetilde{\nabla}_{\dot{\widetilde{\gamma}}}\widetilde{X}_b(b), \widetilde{X}_b(b)\right\rangle}{\left\langle \widetilde{X}(b), \widetilde{X}(b)\right\rangle} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\dot{\widetilde{u}}(b)}{\widetilde{u}(b)} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを移項して欲しかった不等式を得る。

もし $c < a$ ならば連続性から $|\widetilde{X}(c)| \geq |X(c)| > 0$ となり c の選び方に矛盾。したがって $c = a$ より $\widetilde{\gamma}$ は $[0,a]$ 上共役な点対が存在しない。 □

系 1.4.1. 定理の (4),(5) を満たすとし、$p = \gamma(0), \widetilde{p} = \widetilde{\gamma}(0)$ とする。 $X_p \in T_pM, \widetilde{X}_{\widetilde{p}} \in T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$ が $\langle X_p, \dot{\gamma}(0)\rangle = \left\langle \widetilde{X}_{\widetilde{p}}, \dot{\widetilde{\gamma}}(0)\right\rangle, |X_p| = |\widetilde{X}_{\widetilde{p}}|$ を満たすとき、 $|(d\exp_p)_{t\dot{\gamma}(0)}X_p| \leq |(d\exp_{\widetilde{p}})_{t\dot{\widetilde{\gamma}}(0)}\widetilde{X}_{\widetilde{p}}|$ 。

証明. 前定理と例 1.3.1 より明らか。

この定理は定曲率を持つ単連結 Riemann 多様体 (空間形) をモデルとし、考察している Riemann 多様体 (M,g) の曲率と大小関係を持つという仮定のもとで M の幾何を調べる、という形で応用されることが多い。

定曲率 C の Riemann 多様体について、Jacobi 場がどのように表示されるかを調べよう。まず $sn_C(t)$ を微分方程式

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + Cx(t) &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 1 \end{aligned}$$

の解とすると、具体的に

$$sn_C(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{C}t)}{\sqrt{C}} & (C > 0) \\ t & (C = 0) \\ \frac{\sinh(\sqrt{-C}t)}{\sqrt{-C}} & (C < 0) \end{cases}$$

と書ける。 w を測地線に沿った平行な直交ベクトル場で $|w(t)| = 1$ とすると、 $J(t) = sn_C(t)w(t)$ が初期値 $J(0) = 0, J'(0) = w(0)$ の Jacobi 方程式 $\frac{d^2J}{dt^2} + CJ = 0$ の解となる。

補題 1.4.2. $p \in M, q \in \mathrm{Cut}(p)$ で $\rho(p,q) = \rho(p, \mathrm{Cut}(p))$ を満たすとき、次のいずれかが成立する。

(1) p, q を結ぶ最短測地線上で p, q が共役。

(2) p, q を結ぶ正規最短測地線がちょうど 2 つ存在する (γ, σ とおく)。

さらに、(2) の場合 $l = \rho(p,q)$ として $\dot{\gamma}(l) = -\dot{\sigma}(l)$ が成り立つ。

証明. 後半の主張が示されれば、系 1.3.3 と Jacobi 場全体の線形性から前半も従う。

(2) を仮定して $\dot{\gamma}(l) \neq -\dot{\sigma}(l)$ とすると、$\exists X_q \in S_qM,$ s.t. $\langle X_q, \dot{\gamma}(l)\rangle < 0, \langle X_q, \dot{\sigma}(l)\rangle < 0$ 。q は γ 上 p と共役でないので逆関数定理から $l\dot{\gamma}(0) \in \exists U \subset T_pM$ で $\exp_p|_U$ が微分同相になる。 s を十分小さくとると $\xi(s) := (\exp_p|_U)^{-1}\exp_q(sX_q)$ が定義される。ξ は測地線の 1 パラメータ族 $\gamma_s(t) = \exp_p(\frac{t\xi(s)}{l})$ の変分ベクトルなので、第一変分公式から $\frac{1}{2}\frac{dL(\gamma)}{ds}(0) = \langle X_q, \dot{\gamma}(l)\rangle < 0$ 。よって十分小さい $s > 0$ について $L(\gamma_s) < L(\gamma)$ 。同様に $\sigma_0 = \sigma$ なる測地線の 1 パラメータ族 σ_s が存在して、十分小さい $s > 0$ について $L(\sigma_s) < L(\sigma)$ となる。

γ_s, σ_s はともに $p, \exp_q(sX_q)$ の測地線だが、$l_s := \rho(p, \exp_q(sX_q)) \leq L(\gamma_s) < \rho(p,q) = l$ と $\dot{\gamma}(l) \neq -\dot{\sigma}(l)$ より $\exp_p$ は $B(0; \frac{l_s+l}{2}) \subset T_pM$ 上単射でない。これは $l = \rho(p, \mathrm{Cut}(p)) = \iota_p$ に反する。 □

定理 1.4.2. (Klingenberg の補題) (M,g) を完備 Riemann 多様体とし、断面曲率 K が定数 $C > 0$ で抑えられるとする。このとき、次のいずれかが成り立つ。

(1) $\iota_M \geq \frac{\pi}{\sqrt{C}}$

(2) 長さ最小を達成する測地閉曲線 γ が存在して $\iota_M = \frac{L(\gamma)}{2}$

証明. $\iota_M = \rho(p,q)$ なる $p \in M, q \in \mathrm{Cut}(p)$ をとる。前述の考察と定理 1.4.1 から測地線 γ 上の Jacobi 場は $t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{C}}]$ 上で消えない。よって、もし p, q を結ぶ最短測地線上で 2 点が共役なら、長さは $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$ 以上なので (1) が成り立つ。

もし p, q が共役でないなら、前補題から p, q を結ぶ 2 つの最短測地線 γ, σ が取れて $\dot{\gamma}(l) = -\dot{\sigma}(l)$ $(l = \rho(p,q))$ 。p, q を入れ替えて考えると、同様にして $\dot{\sigma}(0) = -\dot{\gamma}(0)$ がわかるので、γ, σ は滑らかに連結でき、1 つの測地閉曲線 τ を作る。このとき作り方から $\iota_M = \frac{L(\tau)}{2}$ であり、 τ は測地閉曲線の長さの最小値を達成する。なぜなら τ' を $L(\tau)$ より短い測地閉曲線とすると $\rho(p', q') = L(\tau')$ なる p', q' が存在する。定義から $\exists q'' \in \mathrm{Cut}(p') \cap \tau', d(p', q'') \leq \frac{L(\tau')}{2} < \frac{L(\tau)}{2} = \iota_M$ より矛盾。したがって (2) が成り立つ。 □

1.5 Bishop-Gromov の体積評価

定義 1.5.1. (M, g) を Riemann 多様体、K をある座標近傍系 $(U; x)$ に含まれる $x(K)$ が可測なコンパクト部分集合とする。このとき K の**体積**を

$$\mathrm{Vol}(K) = \int_{x(K)} \sqrt{G \circ x^{-1}} dx$$

で定義する。ここで $G = \det(g_{ij}), g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ で dx は Lebesgue 測度。

補題 1.5.1. この定義は座標近傍系の取り方に依らない。

証明. $(V; y)$ を別の座標近傍系、$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ のヤコビアンを J として、$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p = \sum_j J_{ij}(x(p))(\frac{\partial}{\partial y_j})_p$ $(p \in x(U \cap V))$ 。よって $g^x_{ij} = J^T(g^y_{kl})J$ より $\sqrt{G^y \circ y^{-1}}dy = \sqrt{G^y \circ y^{-1}(y \circ x^{-1})}|\det J|dx = \sqrt{G^x \circ x^{-1}}dx$ 。 □

(M, g) に完備性を仮定すると、系 1.3.2 から $\exp_p : \Sigma(p) \to M \setminus \mathrm{Cut}(p)$ は微分同相となるので、 M 上の座標近傍系として扱える。$\Sigma(p)$ 上の Lebesgue 測度を $dx = r^{n-1}drd\Theta$ と極座標表示して $\mu(r, \Theta) := \begin{cases} \sqrt{G \circ \exp_p(r\Theta)}r^{n-1} & (r\Theta \in \Sigma(p)) \\ 0 & (o.w.) \end{cases}$ とおくと、$\mathrm{Cut}(p)$ が測度零 (系 1.3.4) より $\mathrm{Vol}(B(p; r)) = \int_{B(0;r)} \mu(r, \Theta)drd\Theta$ と表せる。

μ の性質を調べるため、$\Theta \in S_pM$ を固定して考える。

命題 1.5.1. γ を $\dot\gamma(0) = \Theta$ の正規測地線、 $V_2, \ldots, V_n$ を $V_j(0) = 0$ なる γ 上の直交 Jacobi 場とし、$\{\nabla_{\dot\gamma}V_j(0)\}$ が一次独立だと仮定する。このとき、 $r\Theta \in \Sigma(p)$ なる r について、$\mu(r, \Theta) = \frac{\det(V_j(r))}{\det(\nabla_{\dot\gamma}V_j(0))}$ 。ただし、行列式には $(\dot{\gamma(t)})^\perp$ の正規直交基底を用いる。

証明. $e_1 = \Theta, e_j = \nabla_{\dot\gamma}V_j(0)$ は T_pM の基底をなし、座標系 $\{u_i\}$ を作ることができる。よって $du = \frac{r^{n-1}}{\det(e_i)^n_{i=2}}drd\Theta$ を得る ($e_1 = \Theta = \dot\gamma(0)$ に注意)。

例 1.3.1 より $V_j(t) = (d\exp_p)_{t\Theta}(te_j)$ と書け、$\exp_p(r\Theta)$ において $\partial_1 = \dot\gamma(r), \partial_j = \frac{V_j(r)}{r}$ 。よって $i, j \geq 2$ のとき $\langle \partial_i, \partial_j \rangle = \frac{\langle V_i(r), V_j(r) \rangle}{r^2}$ であり、γ は正規測地線なので $\langle \partial_1, \partial_1 \rangle = 1$ 。さらに補題 1.2.3 より $i \geq 2$ ならば $\langle \partial_1, \partial_i \rangle = 0$ 。したがって

$$\begin{aligned} G &= \det(g_{ij}) \\ &= r^{-2n+2}\det(\langle V_i(r), V_j(r) \rangle)_{i,j \geq 2} \\ &= r^{-2n+2}\det(V_i(r))^2_{i \geq 2} \end{aligned}$$

から与式を得る。 □

補題 1.5.2. (Jacobi の公式) A を $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ の可微分写像とすると、

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = (\det A(t))\,\mathrm{tr}\left(A(t)^{-1} \cdot \frac{dA(t)}{dt}\right)$$

証明. Taylor 展開から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det A(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\det A(t+h)-\det A(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\det(A(t)+hdAdt)-\det A(t)}{h}\\ &= \det A(t)\lim_{h\to 0}\frac{\det\bigl(I+hA^{-1}dAdt\bigr)-\det I}{h}\end{aligned}$$

ここで、固有多項式の性質から $\det(I+hX)=1+h\operatorname{tr}X+O(h^2)$ より $\frac{d}{dt}\det A(t)=\det A\operatorname{tr}\bigl(A^{-1}\frac{dA}{dt}\bigr)$ が分かる。 □

体積比較をするために、定曲率 C を持つ空間形について $\mu_C(r):=\mu(r,\Theta)$ とおく (これは基点 p や Θ の取り方に依らない)。

補題 1.5.3. (M,g) を完備 Riemann 多様体とし $\mathrm{Rc}\geq(n-1)C$ が成り立つとする。このとき $\Theta\in S_pM, r\Theta\in\Sigma(p)$ について $\frac{\mu'(r,\Theta)}{\mu(r,\Theta)}\leq\frac{\mu'_C(r,\Theta)}{\mu_C(r,\Theta)}$ 。ただし、微分は r について取ることとする。

証明. γ を基点 p 、初期値 Θ の正規測地線とする。 $\{e_i(t)\}$ を $e_1(t)=\dot\gamma(t)$ なる γ に沿った平行な正規直交基底とし、 $V_j(t)$ を $V_j(0)=0, V_j(r)=e_j(r)$ なる γ に沿った Jacobi 場とする。

$A(t)=(\langle V_i(t),V_j(t)\rangle)_{i,j\geq 2}, d(t)=\det A(t)=(\det(V_i(t))_{i\geq 2})^2$ とおくと、前補題から ($A(r)=I$ に注意)

$$\frac{\mu'(r,\Theta)}{\mu(r,\Theta)}=\frac{d'(r)}{2d(r)}=\frac{\operatorname{tr}(A'(t))}{2}=\sum_{j=2}^{n}\bigl\langle V_j(r),\nabla_{\dot\gamma(r)}V_j(r)\bigr\rangle=\sum_{j=2}^{n}I(V_j,V_j)$$

ここで $H_j(t)=\frac{sn_C(t)}{sn_C(r)}e_j(t)$ とおくと、これは Jacobi 場なので補題 1.3.3 より

$$\begin{aligned}\sum_j I(V_j,V_j) &\leq \sum_j I(H_j,H_j)\\ &= \int_0^r\Bigl(\frac{sn_C(t)}{sn_C(r)}\Bigr)^2\{(n-1)k-\mathrm{Rc}(\dot\gamma,\dot\gamma)\}dt+\sum_j\bigl\langle H_j(r),\nabla_{\dot\gamma(r)}H_j(r)\bigr\rangle\end{aligned}$$

一方、定曲率 C の空間形について同様の計算を行うと $\frac{\mu'_C(r)}{\mu_C(r)}=\sum_j\bigl\langle H_j(r),\nabla_{\dot\gamma(r)}H_j(r)\bigr\rangle$ より、これらを併せて与式を得る。 □

定理 1.5.1. (Bishop-Gromov の体積評価) (M,g) を $\mathrm{Rc}\geq(n-1)C$ なる完備 Riemann 多様体とし、任意の点 $p\in M$ をとる。このとき、B_r^C を定曲率 C の空間形上で半径 r の測地球とすると、 $r\mapsto\frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}(B_r^C)}$ は単調非増加。とくに $\mathrm{Vol}(B_r(p))\leq\mathrm{Vol}(B_r^C)$ 。

証明. $a(r):=\int_{S^{n-1}}\mu(r,\Theta)drd\Theta, b(r)=\int_{S^{n-1}}\mu_C(r)d\Theta$ とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\Bigl(\log\frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}(B_r^C)}\Bigr) &= \frac{a(r)}{\mathrm{Vol}(B_r(p))}-\frac{b(r)}{\mathrm{Vol}(B_r^C)}\\ &= \frac{\int_0^r(a(r)b(t)-a(t)b(r))dt}{\mathrm{Vol}(B_r(p))\mathrm{Vol}(B_r^C)}\end{aligned}$$

よって前半の主張は $t\leq r$ について $a(r)b(t)-a(t)b(r)\leq 0$ 、つまり $\frac{a(t)}{b(t)}$ が非増加であることを言えばよい。

$\mu_C(r)$ は Θ の取り方に依らないので $\frac{a(t)}{b(t)} = \int_{S^{n-1}} \frac{\mu(t,\Theta)}{\mu_C(t)} d\Theta$ 。よって $\frac{\mu(t,\Theta)}{\mu_C(t)}$ が任意の Θ について非増加であればよい。しかし、前補題から $\frac{d}{dt}(\log \frac{\mu(t,\Theta)}{\mu_C(t)}) = \frac{\mu'(r,\Theta)}{\mu(r,\Theta)} - \frac{\mu_C'(r,\Theta)}{\mu_C(r,\Theta)} \leq 0$ なので示された。

後半の主張は、 $r \to 0$ で両者の体積は $\mathbb{R}^n$ 上の球の体積に近似されるので、比が 1 に近づくことから従う。

□

等号条件を検証することで、$\mathrm{Vol}(B_r(p)) = \mathrm{Vol}(B_r^C)$ と「両者が等長同型であること」が同値であることがわかる。

応用として、Myers の定理の特殊ケースについて考察する。

定理 1.5.2. (Cheng の最大直径定理) 完備 Riemann 多様体 (M,g) が $\mathrm{Rc} \geq (n-1)C > 0$ と評価され $\mathrm{diam} = \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ のとき、(M,g) は球面 S_C^n と等長同型。

証明. 正規化して $C=1$ を仮定する。 $\rho(p,q) = \pi$ なる点 $p,q \in M$ を取り、前の定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_{\pi/2}(p))}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\mathrm{Vol}(B_{\pi/2}(p))}{\mathrm{Vol}(B_\pi(p))} \geq \frac{\mathrm{Vol}(B^1_{\pi/2})}{\mathrm{Vol}(B^1_\pi)} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(B_{\pi/2}(p)), \mathrm{Vol}(B_{\pi/2}(q)) \geq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(M)$$

しかし $B(p;\pi), B(q;\pi)$ は disjoint なので、上の不等式は実は等号である。よって $\mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(B^1)$ より題意が成り立つ。 □

1.6 分裂定理と Busemann 関数

この章では下の定理を示すことを目標とする。

定理 1.6.1. (分裂定理) 完備 Riemann 多様体 (M,g) が直線を含み $\mathrm{Ric} \geq 0$ を満たすとする。このとき、ある Riemann 多様体 (H, g_0) が存在して (M,g) は $(H \times \mathbb{R}, g_0 + dt^2)$ と等長同型 (M が**分裂する**という)。

補題 1.6.1. (Riccati Comparison) C^∞ 級関数 $\rho_1, \rho_2 : (0,b) \to \mathbb{R}$ が $\rho_1(+0) \leq \rho_2(+0), \dot{\rho_1} + \rho_1^2 \leq \dot{\rho_2} + \rho_2^2$ を満たすと仮定する。このとき $\rho_1 \leq \rho_2$ 。

証明. $F := (\rho_2 - \rho_1)\exp(\rho_1 + \rho_2)$ とおくと、仮定から

$$F'(t) = (\rho_2' - \rho_1' + \rho_2^2 - \rho_1^2)\exp(\rho_1 + \rho_2) \geq 0$$

より F は単調非減少。よって $F \geq 0$ から結論が従う。 □

特に $\rho_C(t) := \frac{sn_C'(t)}{sn_C(t)}$ は $\dot{\rho_C} + \rho_C^2 = -C$ を満たすので、補題に用いることができる。

次に M 上の C^∞ 級関数 f について勾配と Hessian を定義する。勾配の「ベクトルとの内積が方向微分に一致」という特徴づけと、Affine 接続が方向微分のアナロジーであることに注意する。

定義 1.6.1. f の**勾配** $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ を、 $\langle \nabla f, X \rangle = Xf$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$ を満たすベクトル場と定める (この ∇ は接続の意味ではない)。また、f の **Hessian** を $\mathrm{Hess} f(X,Y) := \langle \nabla_X \nabla_f, Y \rangle$ $(X, Y \in \mathfrak{X}(M))$ と定義する。これは対称双線形なので $\Delta f := \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f) \in C^\infty(M)$ を考えることができ、**Laplacian** と呼ぶ。

命題 1.6.1. (Bochner's Formula) $|A|^2 := \sum_{i,j} a_{ij}^2$ として、 $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess} f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$

証明. $x \in M$ を固定し $\{e_i\}$ を x の近傍で定義される $\forall i, j, \nabla_{e_i} e_j(x) = 0$ ($\iff$ $\nabla e_i(x) = 0$) なる正規直交標構とする (T_pM の正規直交基底を平行移動させることで作れる)。このとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\sum_i e_i(e_i \langle \nabla f, \nabla f\rangle) \\
&= \sum_i e_i \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle \\
&= \sum_i e_i \mathrm{Hess} f(e_i, \nabla f) \\
&= \sum_i e_i \mathrm{Hess} f(\nabla f, e_i) \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f, e_i\rangle \\
&= \sum_i \{\langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle + \left\langle \nabla_{[e_i,\nabla f]}\nabla f, e_i\right\rangle + \langle R(e_i, \nabla f)\nabla f, e_i\rangle\} \\
\sum_i \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle &= \sum_i \{\nabla f \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle - \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f} e_i\rangle\} = \nabla f(\Delta f)\ (\nabla e_i(x) = 0) \\
\sum_i \left\langle \nabla_{[e_i,\nabla f]}\nabla f, e_i\right\rangle &= \sum_i \mathrm{Hess} f([e_i, \nabla f], e_i) \\
&= \sum_i \mathrm{Hess} f(\nabla_{e_i}\nabla f - \nabla_{\nabla f} e_i, e_i)\ (\nabla : \text{Levi-Civita}) \\
&= \sum_i \mathrm{Hess} f(e_i, \nabla_{e_i}\nabla f)\ (\mathrm{Hess} f : \text{symmetric}) \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle e_j\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle = |\mathrm{Hess} f|^2
\end{aligned}
$$

これらを合わせることで与式を得る。 □

定義 1.6.2. C^∞ 級関数 $r : M \supset U \to \mathbb{R}$ が**距離関数**であるとは、$|\nabla r| \equiv 1$ を満たすことである。このとき、上の命題の結果は $|\mathrm{Hess} r|^2 + \nabla r(\Delta r) = -\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r)$ となる。

補題 1.6.2. $\frac{(\Delta r)^2}{n-1} \leq |\mathrm{Hess} r|^2$

証明. 上の命題と同様に $\{e_i\}$ を取って、

$$
\begin{aligned}
\frac{(\Delta r)^2}{n-1} &= \frac{1}{n-1}(\sum_{i\geq 2} \langle \nabla_{e_i}\nabla r, e_i\rangle)^2 \\
|\mathrm{Hess} r|^2 &= \sum_{i,j} (\langle \nabla_{e_i}\nabla r, e_j\rangle)^2 \\
&= \sum_{i,j\geq 2} (\langle \nabla_{e_i}\nabla r, e_j\rangle)^2
\end{aligned}
$$

となるので、結局 $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ について $|A|^2 \geq \frac{1}{k}|\operatorname{tr} A|^2$ を示せばよい。固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ として、

$$|A|^2 = \operatorname{tr}(AA^T) = \sum_i \lambda^2 \geq \frac{(\sum_i \lambda)^2}{k} = \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{k}$$

より従う。 □

上記の結果から Ricci 曲率を用いた Laplacian の評価を得られる。

補題 1.6.3. n 次元 Riemann 多様体 (M, g) が $\mathrm{Ric} \geq (n-1)C$ $(C \in \mathbb{R})$ を満たすとき、$\Delta r \leq (n-1)\rho_C(r)$

証明. $\rho = \frac{\Delta r}{n-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} + \rho^2 &= \frac{1}{n-1}\nabla r(\Delta r) + (\frac{\Delta r}{n-1})^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\{\nabla r(\Delta r) + \frac{\Delta r}{n-1}\} \\
&\leq \frac{1}{n-1}\{\nabla r(\Delta r) + |\mathrm{Hess} r|^2\} = \frac{-\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r)}{n-1} \leq -C
\end{aligned}$$

よって Riccati Comparison により $\rho \leq \rho_C$ を得る。 □

そして、分裂定理の証明で重要な役割を担う Busemann 関数について定義する。今後 $\mathrm{Rc} \geq 0$ を仮定して $c : [0, \infty) \to M$ を正規化された半直線とし、 $b_t(x) := \rho(x, c(t)) - t$ とする。

命題 1.6.2. b_t は以下の性質を満たす。

(1) x を固定したとき、$t \mapsto b_t(x)$ は非増加で絶対値が $\rho(x, c(0))$ に抑えられる。
(2) $|b_t(x) - b_t(y)| \leq \rho(x, y)$
(3) x 全体で $\Delta b_t(x) \leq \frac{n-1}{b_t+t}$

証明. (1) 三角不等式から

$$|b_t(x)| = |\rho(x, c(t)) - \rho(c(0), c(t))| \leq \rho(x, c(0))$$

であり、$s < t$ について、

$$\begin{aligned}
b_t(x) - b_s(x) &= \rho(x, c(t)) - \rho(x, c(s)) - \rho(c(s), c(t)) \\
&\leq \rho(c(t), c(s)) - \rho(c(s), c(t)) = 0
\end{aligned}$$

(2) は距離の公理から明らか。(3) は $b_t(x) + t$ が距離関数であることから、前補題に $C = 0$ を代入して

$$\Delta b_t(x) = \Delta(b_t(x) + t) \leq (n-1)\frac{1}{b_t(x) + t}$$

を得る。 □

この命題から $\{b_t\}_{t\geq 0}$ はある距離関数 b_c に各点収束し、

$$\rho(b_c(x), b_c(y)) \leq \rho(x, y), |b_c(x)| \leq \rho(x, c(0)), b_c(c(r)) = -r$$

を満たす。これを **Busemann 関数**という。

半直線 c と $p \in M$ に対し p から $c(t)$ の線分の族 $\{\sigma_t\}$ を考える。$v_i \in T_pM$ を単位ベクトルとして $\sigma_t(s) = \exp_p(sv_i)$ とおくと、S_pM のコンパクト性から $v_i \to v$ の収束を仮定してよい。このとき $\widetilde{c}(s) := \exp_p(sv)$ を考えることができ、 $\sigma_t \to \widetilde{c}$ の収束とみなす。このような半直線 $\widetilde{c}$ を**漸近線**という。

命題 1.6.3. (1) $\quad b_c(x) \le b_c(p) + b_{\widetilde{c}}(x)$
(2) $\quad b_c(\widetilde{c}(t)) = b_c(p) + b_{\widetilde{c}}(\widetilde{c}(t)) = b_c(p) - t$

証明. (2) が示されれば、

$$
\begin{aligned}
\rho(x, c(s)) - s &\le \rho(x, \widetilde{c}(t)) + \rho(\widetilde{c}(s), c(s)) - s \\
&= \rho(x, \widetilde{c}(t)) - t + \rho(p, \widetilde{c}(t)) + \rho(\widetilde{c}(t), c(s)) - s \\
\to b_c(x) &\le \rho(x, \widetilde{c}(t)) - t + \rho(p, \widetilde{c}(t)) + b_c(\widetilde{c}(t)) \\
&\le \rho(x, \widetilde{c}(t)) - t + \rho(p, \widetilde{c}(t)) + b_c(p) - t \\
&\to b_{\widetilde{c}}(x) + b_c(p)
\end{aligned}
$$

より (1) が分かる。(2) を示すために $\widetilde{c}$ に収束する線分の族 $\{\sigma_i\}$ をとる。$t_i \to \infty$ について、

$$
\begin{aligned}
\rho(p, c(t_i)) &= \rho(p, \sigma_i(s)) + \rho(\sigma_i(s), c(t_i)) \\
b_c(p) &= \lim(\rho(p, c(t_i)) - t_i) \\
&= \lim(\rho(p, \widetilde{c}(s)) + \rho(\widetilde{c}(s), c(t_i)) - t_i) \\
&= \rho(p, \widetilde{c}(s)) + \lim(\rho(\widetilde{c}(s), c(t_i)) - t_i) \\
&= s + b_c(\widetilde{c}(s))
\end{aligned}
$$

が成り立つので (2) が分かった。 □

補題 1.6.4. $\Delta b_c \le 0$

証明. b_c は $b_c(p) + b_{\widetilde{c}}(x)$ を優関数として取るので、$x = p$ で $\Delta b_c \le \Delta(b_c(p) + b_{\widetilde{c}}(x)) = \Delta b_{\widetilde{c}}(x)$ 。よって代わりに $x = p$ で $\Delta b_{\widetilde{c}}(x) \le 0$ を示せばよい。$b_t(x)$ は $b_{\widetilde{c}}(x)$ の優関数となることに注意して、

$$
\Delta b_t(p) \le \frac{n-1}{t} \to 0
$$

から結論が従う。 □

ここまでの準備で分裂定理を証明することができる。

証明. $c : (-\infty, \infty) \to M$ を直線とする。b^+ を $c : [0, \infty) \to M$ から、b^- を $c : (-\infty, 0] \to M$ から定義される Busemann 関数とする。つまり、

$$
\begin{aligned}
b^+(x) &= \lim(\rho(x, c(t)) - t) \\
b^-(x) &= \lim(\rho(x, c(-t)) - t)
\end{aligned}
$$

明らかに $b^+(x) + b^-(x) = \lim(\rho(x, c(t)) + \rho(x, c(-t)) - 2t) \ge 0$ であり、直線上で 0 に等しい。

前補題から $\Delta(b^+ + b^-) \le 0$ より $b^+ + b^-$ は優調和関数。よって最小値原理より $b^+ + b^- \equiv 0$ が従う。$b^+ = -b^-$ から $0 \ge \Delta b^+ = -\Delta b^- \ge 0$ より $b^\pm$ は調和関数。

次に b^+ が距離関数であることを見る。$p \in M$ と漸近線 $\widetilde{c}^+$ を取る。 b_t の性質 (2) から b^+ が 1-Lipschitz なので $||b^+|| \leq 1$ が従い、$v = \dot{\widetilde{c}}^+(0)$ として Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} ||b^+|| &= ||b^+|| \cdot ||v|| \\ &\geq | \left\langle b^+, v \right\rangle | = |v(b^+)| \\ &= | \lim_h \frac{b^+(\widetilde{c}^+(h)) - b^+(p)}{h} | \\ &= | \lim_h \frac{b^+(p) - h - b^+(p)}{h} | = 1 \end{aligned}$$

よって $|\nabla b^{\pm}(p)| = 1$ が分かり、 p は任意なので $b^{\pm}$ は距離関数になる。

したがって、

$$0 = \frac{(\Delta b^+)^2}{n-1} \leq |\mathrm{Hess} b^+|^2 = -\mathrm{Ric}(\nabla b^+, \nabla b^+) \leq 0$$

より $\mathrm{Hess} b^+ \equiv 0$ が得られる。∇b^+ の生成する 1 パラメータ変換群を $\{\varphi_t\}$ として

$$\varphi : (b^+)^{-1}(0) \times \mathbb{R} \ni (x, t) \mapsto \varphi_t(x) \in M$$

とすると、これが求める等長同型写像になっていることが「b^+ は $\mathrm{Hess} b^+ \equiv 0$ なる距離関数」という性質から導かれる。 $\square$

第 2 章

リッチフロー

2.1 リッチフローの方程式

定義 2.1.1. M を多様体、I を $\mathbb{R}$ 上の開区間とする。I 上で定義される M 上の Riemann 計量の C^∞ な 1 パラメータ族 $g(t)$ が $g(0)$ を初期値とする**リッチフロー**であるとは、偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2\mathrm{Rc}(g)$$

を満たすことを指す。

$(M, g(0))$ がコンパクトのとき、$(M, g(t))$ が体積一定となるように正規化したリッチフローを考えることができる。

$h(t) = \lambda(t) g(t)$ が $\mathrm{Vol}(M, h(t)) : \mathrm{const}$ となる $\lambda(t)$ は

$$\begin{aligned}
\mathrm{dVol}_h &= \sqrt{\det(h_{ij})} dx \\
&= \sqrt{\det(\lambda(t) g_{ij})} dx \\
&= \lambda(t)^{n/2} \mathrm{dVol}_g \\
\mathrm{Vol}(h(t)) &= \mathrm{Vol}(g(0)) \\
\iff \lambda(t)^{n/2} \mathrm{Vol}(g(t)) &= \mathrm{Vol}(g(0)) \\
\iff \lambda(t) &= \left(\frac{\mathrm{Vol}(g(t))}{\mathrm{Vol}(g(0))}\right)^{-n/2}
\end{aligned}$$

と計算できる。また、Jacobi の公式から

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathrm{Vol}(g(t)) &= \int_M \frac{d}{dt} \sqrt{\det(g_{ij})} dx \\
&= \int_M \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}} \det(g_{ij}) \operatorname{tr}\left(\frac{d}{dt} g_{ij}\right) dx \\
&= -\int_M \operatorname{tr}\big(\mathrm{Rc}^g_{ij}\big) \mathrm{dVol}(g(t)) = -\int_M R^g \mathrm{dVol}(g(t))
\end{aligned}$$

g によるスカラー曲率の平均 $r_g := \frac{\int_M R^g \mathrm{dVol}(g(t))}{\mathrm{Vol}(g(t))}$ と、h での値 $r_h := \frac{\int_M R^h \mathrm{dVol}(g(t))}{\mathrm{Vol}(g(t))}$ を用いて、

$$\begin{aligned}
r_h &= \frac{r_g}{\lambda(t)} \\
\frac{d}{dt}\lambda(t) &= -\frac{2}{n}\left(\frac{\mathrm{Vol}(g(t))}{\mathrm{Vol}(g(0))}\right)^{-2/n-1}\frac{\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(g(t))}{\mathrm{Vol}(g(0))} \\
&= \frac{2r_g}{n}\lambda(t) \\
&= \frac{2r_h}{n}\lambda(t)^2 \\
\frac{d}{dt}h &= -2\lambda(t)\mathrm{Rc}_g + \frac{2r_h}{n}\lambda(t)^2 g(t) \\
&= \lambda(t)(-2\mathrm{Rc}_h + \frac{2r_h}{n}h(t))
\end{aligned}$$

$\lambda(t)$ を取り除くために変数変換 $\tau = \int_0^t \lambda(s)ds$ を施すと、

$$\frac{d}{d\tau}h = -2\mathrm{Rc}_h + \frac{2r_h}{n}h$$

を得る。これを**正規化されたリッチフロー**と呼ぶ。これは元々のリッチフローの解が有限時間でしか存在しないケースを克服するために用いられる。

リッチフローの自己相似解、つまり微分同相とスケーリングの組み合わせで得られる解について調べてみる。

定義 2.1.2. 微分同相 $\varphi_t : M \to M$ $(\varphi_0 = id_M)$ の族、$\sigma(t)$ を時間依存のスケーリング係数 $(\sigma(0) = 1)$ とする。もしリッチフロー $(M, g(t))$ が

$$g(t) = \sigma(t)\varphi_t^* g(0)$$

と書けるとき**ソリトン**と呼ぶ。

ソリトンの満たす条件を考えてみよう。方程式に代入して $t = 0$ での値を評価すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}g(t) &= \sigma'(t)\varphi_t^* g(0) + \sigma(t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^* g(0) \\
-2\mathrm{Rc}(g(0)) &= \sigma'(0)g(0) + \mathcal{L}_V g(0)
\end{aligned}$$

ここで、$V = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}$ であり $\mathcal{L}_V$ は Lie 微分を表す。

ところで、$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について Lie 微分の Leibniz 則から

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V(X, Y) &= V(g(X, Y)) - g(\mathcal{L}_V X, Y) - g(X, \mathcal{L}_V Y) \\
&= g(\nabla_V X, Y) + g(X, \nabla_V Y) - g([V, X], Y) - g(X, [V, Y]) \\
&= g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V)
\end{aligned}$$

から $(\mathcal{L}_V g)_{ij} = \nabla_i V_j + \nabla_j V_i$ が成り立つので、$\sigma'(0) = 2\lambda$ と置いて成分表示すると

$$-2R_{ij} = 2\lambda g_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i$$

ソリトンはスケーリング率が $\lambda = 0, \lambda < 0, \lambda > 0$ のとき、それぞれ**安定・縮小・拡大ソリトン**という。

特に、V があるスカラー関数 f の勾配として書けるとき、つまり $V_i = \nabla_i f$ となるとき、

$$R_{ij} + \lambda g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = 0$$

と変形できる。この解を**勾配ソリトン**と呼ぶ。次は勾配ソリトンの代表的な例である。

例 2.1.1. (cigar soliton) $M = \mathbb{R}^2$ として計量を $g(0) = \frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2+1}$ と定める。これが安定勾配ソリトンになることを見る。

Christoffel 記号を計算すると

$$\begin{aligned}
\Gamma^x_{xx} = \Gamma^y_{xy} = \Gamma^y_{yx} &= -\frac{x}{x^2+y^2+1} \\
\Gamma^y_{yy} = \Gamma^x_{xy} = \Gamma^x_{yx} &= -\frac{y}{x^2+y^2+1} \\
\Gamma^x_{yy} &= \frac{x}{x^2+y^2+1} \\
\Gamma^y_{xx} &= \frac{y}{x^2+y^2+1}
\end{aligned}$$

これを用いて Ricci 曲率を求めると $f = -\log\bigl(1 + x^2 + y^2\bigr)$ として $R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = 0$ を満たすことがわかる (Ricci 曲率そのものは省略)。スカラー曲率は $R = \frac{4}{x^2+y^2+1} > 0$ であり、原点からの距離が離れるほど小さくなる。

極座標表示は $g = \frac{dr^2+r^2d\theta^2}{r^2+1}$ であり、変数変換 $s = \int_0^r \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$ において $g = ds^2 + (\tanh s)^2 d\theta^2$ となる。$\tanh s \to 1 (s \to \infty)$ から、遠方では $g \approx ds^2 + d\theta^2$ となり $S^1 \times \mathbb{R}$ に近い幾何を持つことが分かる。

参考文献

[1] PETERSEN, Peter. Riemannian geometry. New York: Springer, 2006.

[2] SHERIDAN, Nick; RUBINSTEIN, Hyam. Hamilton's Ricci flow. Honour thesis, 2006.

[3] ANDREWS, Ben; HOPPER, Christopher. The Ricci flow in Riemannian geometry: a complete proof of the differentiable 1/4-pinching sphere theorem. Springer, 2010.

[4] CHOW, Bennett; LU, Peng; NI, Lei. Hamilton's Ricci flow. American Mathematical Soc., 2006.