Ehrhart Theorem

Toric 幾何の組み合わせ論的な応用として Ehrhart の基本定理がある．これは整凸多面体に含まれる格子点の個数についての言明であり, 主張自体の理解のしやすさと対照的に証明が複雑であることで知られる．

定理 0.1. (Ehrhart の基本定理) $M \subset \mathbb{R}^n$ を格子点全体, $P \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元整凸多面体とする．このとき, 以下の条件を満たす有理係数多項式 $E_P \in \mathbb{Q}[x]$ が一意に存在する．

(1) 任意の $\nu \in \mathbb{N}$ に対し, $E_P(\nu) = \#((\nu P) \cap M)$ ．つまり, P を n 倍した多面体に含まれる格子点の個数が $E_P(\nu)$ となる．
(2) E_P の最高次係数は P の体積 $\mathrm{Vol}_M(P)$ と一致する．
(3) $\nu > 0$ を正整数とすると, $E_P(-\nu) = (-1)^n \#(\nu \mathring{P} \cap M)$ ．

ここでは, 基本定理の証明の概略について簡潔に述べる．おおまかな流れは [1] に則っている．

1 Toric 幾何の Setting

Toric variety X_P を作る過程を思い出す．まず P から normal fan Σ_P を定義する．P を成す各 face F に対して $C_F := \{w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} |\ P$ 上で max を取る点は F を含む $\}$ とする．全ての C_F を集めた集合を Σ_P とすると, これは complete fan になっていることが確認できる．

Σ_P を構成する各 cone σ に対して $\sigma^\vee = \{x : x \cdot y \geq 0, \forall y \in \sigma\}$ とすると, Gordan lemma から $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ は有限生成である．よって $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ は有限生成 $\mathbb{C}$ 代数となり, $X_\sigma := \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ を σ に付随する affine toric variety と呼んでいた．各 cone の貼り合わせによって X_P を作ることが出来る．

既に埋め込まれている Torus $X_{\{0\}} = (\mathbb{C}^\times)^n \subset X_P$ は dense open なので, X_P 上の有理型関数からなる関数体は Torus 上のそれと一致する．この生成元は第 i 成分への射影

$\chi_i : (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{C}^\times$ である. $u \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\chi^u : (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{C}^\times$ を $\chi^u = \prod_i \chi_i^{u_i}$ とし, この形の関数を指標と呼ぶ.

P の codim 1 の face(facet と呼ぶ) F は Σ_P の 1 次元 cone C_F に対応し, X_P 上の因子 $D_F := X_{C_F}$ とも対応している. 指標 χ^u が D_F 上で正則関数となるための条件は $u \in (C_F)^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ であること, つまり $\forall w \in C_F, u \cdot w = w(u) \geq 0$ と同値である. F の法線ベクトル u_F を取ると C_F の元は $w = \langle u_F, \cdot \rangle$ という形に限られるので, 結局 $u \cdot u_F$ の符号によって極か零点かが定まっていることになる.

ここから, P 内の格子点の集合を cohomology として表現する方法を考える. 各 facet $F \subset P$ に対して法線ベクトル u_F と定数 a_F を取り, P が半空間 $H^+(u_F, a_F) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u_F \leq a_F\}$ の共通部分となるようにする. 因子 D_P を $\sum_{F \subset P} a_F D_F$ と定義し, 対応する直線束を $\mathcal{L}_P$ と置く.

このとき, ある指標 χ^u が $\mathcal{L}_P$ の大域切断となるための条件は, 全ての facet F について order の条件 $u \cdot u_F \leq a_F$ を満たすことと等価になる. これは正しく $u \in P \cap \mathbb{Z}^n$ という条件に一致することが分かる. よって,

$$H^0(X_P, \mathcal{L}_P) = \oplus_{u \in P \cap \mathbb{Z}^n} \mathbb{C} \cdot \chi^u$$

ここで, 次の Fact を用いる.

定理 1.1. (Demazure vanishing) Toric 多様体 X_P 上の Divisor D が nef ならば, $i > 0$ に対して $H^i(X_P, \mathcal{O}(D)) = 0$. 特に $\chi(X_P, \mathcal{L}_P) = \#(P \cap \mathbb{Z}^n)$ が成立する.

2 Ehrhart Theorem の証明

Proof. P に対し, 先程作った Toric 多様体 X_P と因子 D_P を用いる. Hirzbruch-Riemann-Roch より, $\nu \in \mathbb{Z}$ について

$$\chi(X_P, \mathcal{O}(\nu D_P)) = \int_{X_P} ch(\mathcal{O}(\nu D_P)) Td(X_P)$$

ここで, $\mathcal{O}(\nu D_P)$ は直線束であることと c_1 の加法性から

$$\begin{aligned} ch(\mathcal{O}(\nu D_P)) &= \exp(c_1(\mathcal{O}(\nu D_P))) \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{c_1(\mathcal{O}(\nu D_P))^m}{m!} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{c_1(\mathcal{O}(D_P))^m \nu^m}{m!} \end{aligned}$$

よって,

$$\chi(X_P, \mathcal{O}(\nu D_P)) = \int_{X_P} (\sum_{m \geq 0} \frac{c_1(\mathcal{O}(D_P))^m \nu^m}{m!}) Td(X_P)$$
$$= \sum_{m \geq 0} \frac{\nu^m}{m!} (\int_{X_P} c_1(\mathcal{O}(D_P))^m Td(X_P))$$

右辺を $h(\nu)$ と置くと, これは $d = \dim X_P$ 次の多項式である. また, $\chi(X_P, \mathcal{O}(\nu D_P)) = \#(\nu P \cap \mathbb{Z}^n)$ より $h(\nu)$ は Ehrhart function $E_P(\nu)$ と一致する. これで (1) が証明できた. (2) は $E_P(x) = a_d x^d + \cdots a_0$ と置くと

$$a_d = \lim_{\nu \to \infty} \frac{E_P(\nu)}{\nu^d} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\#(\nu P \cap \mathbb{Z}^n)}{\nu^d} = \mathrm{Vol}(P)$$

から分かる.

(3) を示す. 標準束は

$$\omega_{X_P} := \mathcal{O}(-\sum_F D_F)$$

として定義される. Serre duality より

$$H^i(X_P, \mathcal{O}(-\nu D_P)) = H^{d-i}(X_P, \mathcal{O}(\nu D_P) \otimes \omega_{X_P})^*$$
$$E_P(-\nu) = \chi(X_P, \mathcal{O}(-\nu D_P)) = (-1)^d \chi(X_P, \mathcal{O}(\nu D_P) \otimes \omega_{X_P})$$

νD_P $(\nu > 0)$ は ample なので, Kodaira vanishing より右辺は $(-1)^d \dim H^0(X_P, \mathcal{O}(\nu D_P) \otimes \omega_{X_P})$ に一致する.

$\nu D_P - \sum_F D_F = \sum_F (\nu a_F - 1) D_F$ を改めて D' と置く. D_P を作った流れを遡って考えると, D' に対応する polytope は $P' := \cap_{F \subset P} H^+(u_F, \nu a_F - 1)$ である. ここで, 格子点 x に対して内積 $x \cdot u_F$ は整数値をとるため, $x \cdot u_F \leq \nu a_F - 1$ と $x \cdot u_F < \nu a_F$ は同値. したがって,

$$E_P(-\nu) = (-1)^d \dim H^0(X_P, \mathcal{O}(D')) = (-1)^d \#(P' \cap \mathbb{Z}^n) = (-1)^d \#(\nu \mathring{P} \cap \mathbb{Z}^n)$$

□

系 2.1. (Pick) $P \subset \mathbb{R}^2$ を凸多角形とする. この時,

$$\#(P \cap M) = \mathrm{Vol}_M(P) + \frac{1}{2} \#(\partial P \cap M) + 1$$

Proof. (1) から Ehrhart 多項式は $E_P(x) = \mathrm{Vol}_M(P)x^2 + Bx + 1$ という形をしている. $P = \mathring{P} \cup \partial P$ より,

$$E_P(1) = \#(P \cap M) = \#(\mathring{P} \cap M) + \#(\partial P \cap M)$$

(3) の $E_P(-1) = \#(\mathring{P} \cap M)$ と合わせて

$$E_P(1) - E_P(-1) = \#(\partial P \cap M) = 2B$$

を得る. よって $B = \frac{1}{2}\#(\partial P \cap M)$ より

$$E_P(x) = \mathrm{Vol}_M(P)x^2 + \frac{1}{2}\#(\partial P \cap M)x + 1$$

が成り立ち, $x = 1$ を代入して与式を得る. □

References

[1] `https://web.stanford.edu/~bvchurch/assets/files/talks/Ehrhart_Poly.pdf`

[2] Miller, Ezra, and Bernd Sturmfels. Combinatorial commutative algebra. New York, NY: Springer New York, 2005.